Von der Schönheit des Zählens

Thorjin der Sandzählende[1]

„Alljede uuz-schoenstere Zahlgesamtheit ist als Vielfalt teilbarster Schachtelungen von Vielheiten darzustellen. Dies hat sich aber als überraschend schwierig erwiesen.“
Mujiajian der Rechner, 773 – 813 BF.

Die Welt ist schön, wie sollte es bei Rurs Geschenk auch anders sein? Als Geschenk einer Gottheit für ihre ewige Bruderschwester enthält sie für uns Sterbliche mehr Wunderhaftes, als wir in einem Lebenszyklus zu fassen vermögen und so können wir uns über den Kreislauf aus Vergehen und Wiedergeburt freuen, dank dem wir mehrere Leben Zeit haben, die Schönheit immer wieder aufs Neue aus einem frischen Blickwinkel zu erfahren. So will ich mich demütig in diesem Aufsatz mit einem kleinen Teil der Struktur unserer Welt beschäftigen und versuchen, dessen Aesthetik in diesem Text einzufangen. So könnt ihr, liebe Bruderschwestern, die ihr ebenfalls einen Sinn für seine Schönheit habt, vielleicht meine Freude an diesem Unterfangen teilen und so die Schönheit, der Welt mehren, denn die einsame Freude ist bruderlos, die geteilte Freude aber wird dereinst Grors Auge erstrahlen lassen! Folgt mir in diesem Aufsatz also in die Welt der Zahlen, jenen elementaren Hilfen für unser Denken, die, wie mir scheint, zwar ein unverzichtbares Hilfsmittel für alle, die zählen, darstellen, dabei aber meist ein Schattendasein im Reich der Nichtbeachtung fristen, ganz so, als ob alle die Mühe vergessen haben, die das Erlernen der Al'Gebra einst bedeutete. Denn, wie das obige Zitat Mujiajians so schön darlegt: Die Schönheit der Welt ist ganz natürlich auch in den Zahlen verankert, es ist aber mitunter schwierig, dies auf den ersten Blick zu sehen.

Der Ursprung des Zählens: die Systeme der Eins und der Zehn

Welches Volk als erstes auf die heute so weit verbreitete Zählweise des Systems der Zehn gekommen ist, lässt sich nicht mehr mit absoluter Sicherheit feststellen. Sowohl die bosparanischen als auch die tulamidischen Bruderschwestern scheinen schon sehr lange diese Sammlung von Zahlen zu nutzen, welche sie möglicherweise einst von den Zwergen übernommen haben, [2] wobei die güldenländischen Einwanderer auch lange an einem wenig nützlichen eigenen System festgehalten haben. Zunächst möchte ich aber den Blick auf eine noch ältere Art des Zählens werfen, die als erste Etablierung eines Zählsystems gelten dürfte. Diese Rückschau ist wichtig, um zu verstehen, wie das System der Zehn entstanden ist und warum es vielleicht einfach ist, aber dennoch weder schön ist noch sein kann.

Die Wurzel der heutigen Zählweisen findet sich im simplen und einzigartigen System der Eins. Es ist so einfach zu erlernen und scheint durch diese Schlichtheit, wie so vieles Bruderschwesterlose, gerade den Einfältigen einen solchen Vorteil zu bieten, dass sie trotz der ebenfalls vorhandenen eklatanten Schwächen von diesem System verführt werden.

Im System der Eins gibt es nur ein Element, eine einzige Basiszahl. Sie besitzt den Grundwert Eins und kann auf vielfältige Weise dargestellt werden, z. B. als Finger, Strich, Strohhalm oder auch als Stein. Höhere Werte werden durch eine entsprechende Anzahl des Grundelements dargestellt. Für die Vier würde man also vier Finger nutzen. Offenkundig ist dies ein System, das auch eher einfache Gemüter schnell verstehen, doch spätestens, wenn man zu Zahlen jenseits der Zehn kommt, merkt bruderschwester, dass man jene auf diese sehr simple Art nicht mehr einfach mit den uns von Rur gegebenen zwei Händen darstellen kann. Eine weitere Begrenzung dieser einzigartig schlichten Zählweise wird klar, wenn man bedenkt, dass die Null als Element hier nur indirekt vorkommt. Will man sie abbilden, geht das nur, indem man sagt, die Null sei die Darstellung von

[1] Akademie Asboran – Institut der Al'Gebra, Dozent.

[2] Neben den Angroschim wären als mögliche Quelle des menschlichen Wissens auch die Geschuppten zu nennen, zu denen zwar nie ein enger Kontakt bestand, auf deren Hinterlassenschaften Menschen und Zwerge jedoch häufiger gestoßen sein sollten. Das ewige Volk nutzt zum Zählen das System der Fünf, welches eine gewisse Verwandtschaft zum System der Zehn aufweist. Da es für das schöne Zählen keine Relevanz besitzt und auch für die bekannten menschlichen Systeme keine Rolle spielt, lässt dieser Aufsatz ansonsten den Einfluss der Geschuppten außer Acht.

genau keinem Element. Dies ist jedoch eine Ungenauigkeit, denn ohne eine Angabe wird immer die Frage im Raum stehen: Hat hier jemand vergessen die Menge anzugeben oder ist sie tatsächlich null? Findet sich also in einer Lagerliste eine Angabe zu Säcken Reis ohne weitere Angabe dahinter, dann wird man im Fall der Fälle also nochmal beim Lageristen nachfragen müssen. Als Alternative kann bruderschwester hier den Strich als Angabe für „nichts vorhanden" einführen, aber das bedeutet im Endeffekt, dass man das System der Eins verlässt, indem man ein weiteres Element einführt.

Irrige Wege zur Erkenntnis der Schönheit Teil 1 – die Bosparanischen Zahlen

Relikte des archaischen Systems der Eins findet man in den Bosparanischen Zahlen, die gerade von den leider oft für die Schönheit der Welt blinden Gelehrten der güldenländischen Einwanderer lange genutzt wurden und auch heutzutage noch im Einzelfall Verwendung finden, bspw. bei der Nummerierung von Bänden einer Serie oder als Namenszusatz für Herrscher mit gleichem Namen. Die Grundsymbole der Werte leiten sich zunächst von der Zählweise mit den Fingern ab:

- Die Eins wird als **I** dargestellt, wobei der Buchstabe bei der Entwicklung der Symbole schon früh an die Stelle des ursprünglichen typischen Zählstrichs trat. Dieser Strich, der das geschriebene Äquivalent des einzelnen Fingers beim Zählen mit den Händen darstellt, bietet als Basis des Systems der Eins die Möglichkeit, alle Zahlen als repräsentative Mengendarstellungen (*lies:* Strichliste) abzubilden. Selbst die Bosparaner erkannten allerdings schon die Unpraktikabilität dieser Methode und nutzten weitere Abkürzungen für ausgewählte größere Werte.[3]
- Die volle Hand, also Fünf, wird durch das **V** dargestellt, in welchem man die rudimentäre Form einer ganzen Hand mit gespreizten Fingern erkennen kann. Das Symbol ersetzte schon recht früh die Fünfergruppen der Strichliste.
- Die doppelte Menge, also zwei Hände bzw. Zehn, ergibt **X**. Dabei kann man das **X** als die Kombination von zwei **V** sehen, von denen eines gespiegelt an der Horizontalen auf dem Kopf steht[4].

Andere Zahlen als die Grundzahlen ergeben sich in diesem System, indem man eine möglichst kleine Anzahl der Grundzeichen kombiniert, die zusammengezählt den gewünschten Gesamtwert ergeben. Sechzehn wird also als **XVI** (*zwei ganze Hände plus eine ganze Hand und ein Finger*) dargestellt.

Eine Vielzahl von kombinierten Symbolen kann allerdings schnell zu Fehlern aufgrund von falschen Lesungen der unübersichtlichen Darstellung führen. Für die Vier ergibt sich beispielsweise **IIII** als Symbol, das gerade bei etwas unsauberer Schrift schnell als **III oder VII** gelesen wird, wenn man einen Strich übersieht oder nicht ganz gerade setzt. Deshalb folgte die Einführung einer Sonderregel: Ein Zeichen eines geringeren Wertes links von einem mit höherem Wert wird nicht zum Gesamtwert addiert, sondern von diesem abgezogen. Damit schreibt sich die Vier **IV** (*ein Finger wird abgezogen von einer vollen Hand*). Die Lesbarkeit wird so verbessert, doch muss man diese Spezialregel kennen, und das Verstehen der Zahl beim Lesen wird aufwändiger.

Für größere Zahlen jenseits der Zehn gibt es weitere Symbole. Diese lassen sich aber nicht mehr direkt von den Fingerdarstellungen ableiten und weisen teilweise recht komplexe Ursprünge auf:

---

[3] Die Strichliste ist vermutlich die ursprünglichere verschriftliche Zählform, die ihrerseits bereits mehrere Entwicklungsstufen aufweist. Zur besseren Übersicht wurde früh die Gruppierung handzähliger Fünfergruppen von Strichen eingeführt. Später wurde bei diesen Pentaden dann zur besseren Identifizierung der vollen Gruppen der jeweils fünfte Strich als Querstrich eingesetzt. Die Acht sieht in den drei Schreibweisen wie folgt aus:

IIIIIIII → IIIII III → ~~IIII~~ III

[4] Eine alternative Genese des **X** geht von einem auch in weiteren Fällen genutzten Mechanismus aus, mit dem die Verzehnfachung einer Menge dargestellt wird. Diese Ermächtigung der Zahl zu ihrer zehnfachen Größe erreicht man durch eine ergänzende Überlagerung mit dem Symbol der Eins. Im Fall der verzehnfachten Eins (*lies:* Zehn) würde allerdings das zusätzliche Eins-Symbol sich selbst überdecken, weshalb beide Striche zu einem Kreuz kombiniert wurden. Eine mögliche Paralleldarstellung gelingt nicht, da sie identisch mit der Darstellung der Zwei (**II**) wäre.

- Das **L** für Fünfzig ergibt sich aus einer Verzehnfachung der Fünf, also des **V**. Diese wird durch die Überlagerung des **V** mit dem senkrechten Strich der Eins dargestellt. Das frühe Symbol wurde im Gebrauch nach und nach vereinfacht, bis man schließlich nur noch die rechte Hälfte nutzte und bei dieser den ursprünglich nach schräg rechts oben verlaufenden Strich in die Horizontale brachte.
- Die Hundert wurde ursprünglich ebenfalls als Verzehnfachung eingeführt. Das **X** wurde mit **I** überlagert, woraus mit der Zeit als Vereinfachung zunächst die halbierte Darstellung (in Form eines **K**) entstand, die schließlich zum **C** wurde. Hierbei spielte sicherlich eine Rolle, dass das **C** auch den Anfangsbuchstaben des bosparanischen Zahlwortes *centum* bildet.

Da das Zeichen für Fünfhundert, dem zweithöchsten einfachen Wert, sich von dem für Tausend ableitet, muss man erst die Entstehung des Letzteren verstehen, um die des Ersteren nachvollziehen zu können.

- Die Tausend ist eine Verzehnfachung der Hundert. Da diese in ihrer ursprünglichen Form schon drei Striche enthält – durch die Verzehnfachung der Zehn, die man ja wiederum als verzehnfachte Eins erklären kann – wurde der Strich so integriert, dass sich ein Doppelkreuz bzw. Stern mit insgesamt vier Strichen ergab. Zur Vereinfachung ließ man in der Folge eines der Kreuze weg und ersetzte es durch einen Kreis. Durch Vereinfachungen im Gebrauch entstand aus diesem schließlich das **M** als Symbol (siehe **Fig. 1**). Wie bei der Hundert half auch hier bei der Genese wohl mit, dass das **M** gleichzeitig der erste Buchstabe des zugehörigen bosparanischen Zahlwortes *mille* ist.
- Ein Relikt der ursprünglichen Darstellung der Tausend findet sich bei der Fünfhundert, die als **D** dargestellt wird. Bei diesem zunächst noch mit einem Querstrich versehenen Zeichen handelt es sich um nichts anderes als das halbierte alte Tausenderzeichen, dem Kreuz im Kreis. Im Gegensatz zu den anderen Halbierungen, die nur aus Vereinfachungsgründen stattfanden, erfolgte in diesem Fall auch eine Halbierung des Wertes.

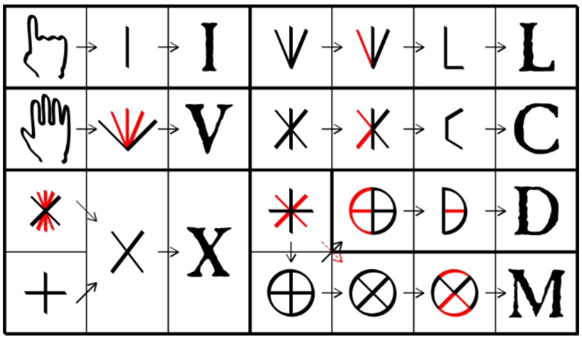

Fig. 1 – Die Genese des bekannten Grundstocks der Bosparanischen Zahlen, von den Handzeichen über die frühen Strichsymbole bis zu den späteren Buchstabendarstellungen.

Damit ergeben sich in der einfachen Grundform des bosparanischen Systems sieben Symbolzeichen[5], die für Zahldarstellungen vor allem summierend, aber im Spezialfall auch subtrahierend kombiniert werden: **I**, **V**, **X**, **L**, **C**, **D**, **M**. Nicht explizit vorhanden, wie im System der Eins, ist hierbei die Null. Das bosparanische System stellt insgesamt den Versuch dar, Zahlen mit zwei verschiedenen Schrittstufen (der Verfünffachung und der Verzehnfachung der Basis bzw. Verdoppelung der verfünffachten Stufe) darstellbar zu machen. Man kann hier die starke Anbindung an das „*Zählen mit den Händen*“ erkennen, wie es die meisten Kinder und auch viele erwachsene Bruderschwestern praktizieren, die nicht viel Übung mit dem Zählen haben.

Die Fünf als Menge einer Hand und die Zehn als Menge von zwei Händen scheint eine natürliche Unterteilung zu ergeben. Dennoch sind die Bosparanischen Symbole für die Zwecke der Al'Gebra untauglich, wie jeder bestätigen wird, der schriftliche Rechnungen mit ihnen versucht hat. Durch die begrenzte Zeichenzahl müssen außerdem für die Darstellung wirklich großer Mengen – z. B. der Einwohnerzahl einer großen Stadt – entweder sehr viele Ausgaben des **M** kombiniert oder weitere neue Zeichen ersonnen werden. Die Schönheit der Welt lässt sich so nur sehr schwer angemessen darstellen. Denn wie lehrte uns schon der weise Sulziber?

„Die Schönheit der Welt kann nur von schönen sprachlichen Gebilden angemessen erfasst werden.“

[5] Mit der Hinzunahme der Null als achtem Zeichen könnte man dem System eine deutlich aesthetischere Note geben. Die Bosparaner gingen aber einen völlig anderen Weg, als sie die Wichtigkeit der Null schließlich erkannten: Sie übernahmen mit ihr auch gleich das deutlich praktikablere (wenn auch noch nicht wirklich schöne) System der Zehn von den Tulamiden.

Irrige Wege zur Erkenntnis der Schönheit Teil 2 – das urtulamidische System der Zehn

Die weisen Stammeltern der Beni Tulam haben, so viel wir wissen, durch den Kontakt mit den Zwergen des Rashtulswalls die uns heute so gebräuchliche Zähltechnik des Systems der Zehn kennengelernt. Ähnlich den Bosparanischen Zahlen basiert auch dieses System auf unseren Händen, was sich in der Zehn als prägender Zahl ausdrückt. Die Art der Darstellung ist allerdings eine völlig andere: Während die Bosparanischen Zahlen im Wesentlichen die Werte ihrer einzelnen Symbole addieren, hängt im zwergischen System der Wert einer bestimmten Ziffer immer noch zusätzlich von ihrer Stellung in der Gesamtzahl ab[6]. Auch dieses System kennt eine feste Familie von Symbolzeichen, die für sich genommen für bestimmte Werte stehen. Die Werteskala deckt hier aber den kompletten ganzzahligen Bereich von Null bis Neun ab.

Die uns bekannten Ziffernsymbole der Zwerge stellen in ihrer ältesten Form innerhalb des altzwergischen Angram eine feste Kombination der zum Wert der Ziffer passenden Strichzahl dar. Diese noch recht umständliche Form, die zum Meißeln in Stein gedacht war, was wohl ihre sehr kantige Gestalt erklärt, wurde allerdings nach und nach vereinfacht. Die Urtulamiden übernahmen vermutlich schon eine etwas weniger umständliche Form der Ziffern,[7] die sie zudem für das Schreiben mit Tinte oder Tusche anpassten. Mit der Zeit folgten weitere Vereinfachungen der Schreibweise, bis sich schließlich die Menge der uns heute bekannten Zahlen ergab.

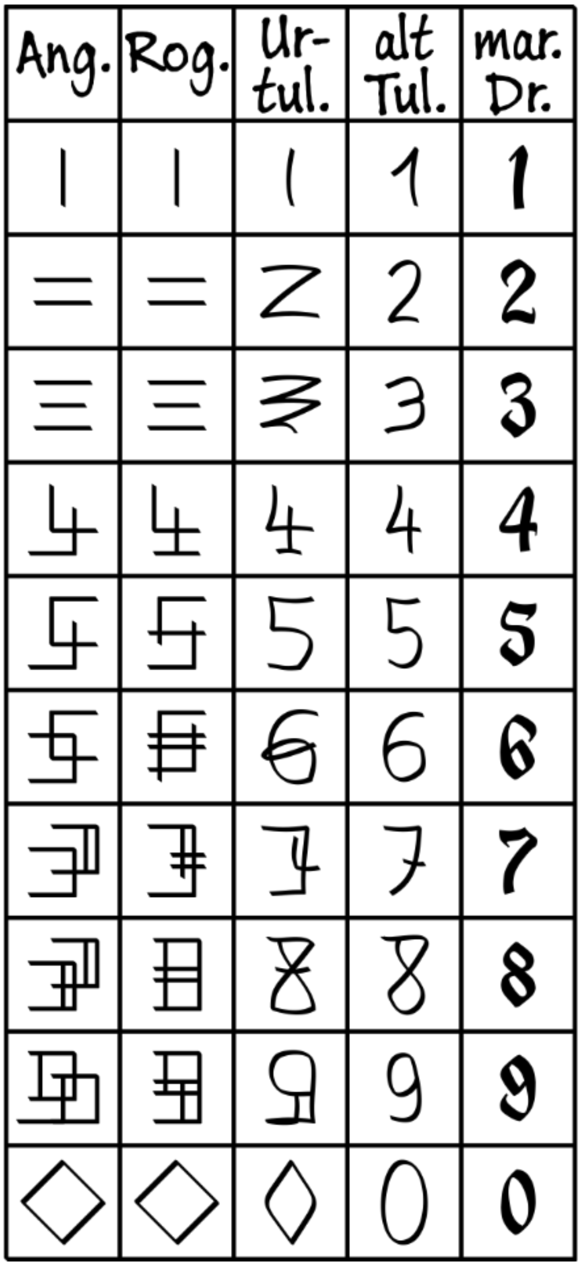

Fig. 2 – Die Transformation der zwergischen Glyphen in die tulamidischen Ziffern.

Wie wird nun im System der Zehn der Wert einer Ziffernfolge ermittelt? Zunächst einmal muss man dazu die Zahl von rechts nach links lesen, also entgegen der bei den Kusliker Zeichen üblichen Schreibrichtung. Jede Stelle hat einen Grundwert, der für den Gesamtwert mit dem Wert der Ziffer multipliziert werden muss. Die so erhaltenen Werte aller Stellen werden dann zur Gesamtzahl addiert. Der Grundwert an der Stelle S von rechts entspricht nun der $(S - 1)$. Mächtigkeit der Basiszahl 10. Für die erste Stelle ist dies also 10^{1-1}, was 1 ist, für die zweite Stelle 10^{2-1}, was 10 ist, für die dritte Stelle 10^{3-1}, was 100 ist, und so weiter. Man spricht deshalb auch von der Einer-, Zehner- und Hunderterstelle. Die Ziffernfolge 128 ergibt somit 8 x 1 + 2 x 10 + 1 x 100, was wir dann auch in unserer sprachlichen Darstellung der Zahl

[6] Bei den subtraktiven Kombinationen IV, IX, XL, XC, CD und CM hängt der konkrete Wert der jeweiligen Bosparanischen Zahl allerdings ebenfalls von ihrer Stellung ab. In diesem System ist dies aber nur ein Sonderfall zur knapperen Zahlendarstellung und stellt einen Bruch des einfachen Grundsystems dar, nicht einen integralen Bestandteil.

[7] Die Urtulamiden prägten auch den Begriff „Ziffer“ als „al'sifr“, was im garethischen „leer“ bedeutet und darauf verweist, welche immense Neuerung die Einführung der Null als eigener Ziffer bedeutete.

ausdrücken, wenn auch in verdrehter Reihenfolge: Einhundertachtundzwanzig.[8]

Vier harmonische Systeme zu Ehren der Zwillinge

Das System der Zehn ist weitverbreitet und hat sich auch in unserer Sprache fest verankert, warum sollte man also nicht mit ihm zufrieden sein? Nun, die Haffajas sind auch fest auf unserer Insel verbreitet und haben sich in unserem Leben verankert, dennoch kämpfen wir gegen sie an. Der Grund ist natürlich: Als Werkzeuge Rurs sind wir dafür bestimmt, die Schönheit der Welt zu bewahren, wobei unser Wille dabei keine Rolle spielt, denn jeder von uns geht den Weg, der ihm auf dem Weltendiskus vorgezeichnet ist. Wenn ich also das System der Zehn ablehne, dann deshalb, weil es offenkundig nicht das System ist, das Rurs Schönheit vorherbestimmt hat. Für die von euch, deren Blick noch nicht so klar ist, dies zu sehen, mag ein kleiner Hinweis helfen, diese Schönheit zu erkennen: Auch die Haffajas nutzen dieses System und besudeln es mit ihrer Existenz, wie schön wäre es daher, wenn wir uns von ihnen absetzten und unsere eigenen Systeme nutzten, die von ihren verwirrten Geistern dann nicht mehr verstanden werden könnten, da ihnen der Blick für das Schöne fehlt?

Was kann aber nun die Basis eines solch schönen System sein? Die Antwort ist natürlich die Zwei, denn diese durchdringt als Widerspiegelung der Herrlichkeit der Zwillinge die ganze Schöpfung, und so kann die aesthetische Darstellung der Zahlen im Prinzip nur auf ihr basieren. Nun mag mancher einwenden: Aber Rur gab uns doch zehn Finger! Doch dies ist der typische Blick der Kurzsichtigen, die die Schönheit der Welt niemals werden erfassen können, da sie nie gelernt haben, auch einmal jenseits ihrer Nasenspitze die Dinge zu erfassen. Schaut genauer hin! Rur gab uns zwei Hände mit zusammen acht Fingern und zwei Daumen! Welch deutlicheres Zeichen kann es denn noch geben? 8 und 2, nicht 10 ist hier das, was die Schönheit ausmacht!

Doch Rur liebt die Vielfalt, also kann es nicht nur das eine schöne System geben. Deswegen soll es hier um vier Systeme gehen, die auf der Zwei basieren und in einer harmonischen Beziehung zueinander stehen: Die Systeme der Zwei, der Vier, der Acht und der Sechzehn. Mit dem System der Zehn haben sie ihre Systematik gemein. Alle vier kombinieren Stellenwert und Ziffernwert, ihre Grundzahlen sind aber nicht 10, sondern 2, 4, 8 und 16.[9]

Das System der Zwei, auch Dualsystem geheißen, ist dabei das Fundament, in dem auch die beiden Grundprinzipien der Welt auftauchen: Das Sein und das Nichtsein. Dafür stehen die beiden Grundzahlen, 0 und 1, andere Ziffern gibt es nicht. Die Zahlen werden deshalb auch Zwillingszahlen genannt. Die Werte der Stellen entsprechen den Mächtigkeiten der Zwei: $2^{1-1} = 1$, $2^{2-1} = 2$, $2^{3-1} = 4$, $2^{4-1} = 8$ etc. Entsprechend dem Prinzip der Ziffer zählt die Mächtigkeit (1) oder sie zählt nicht (0). Die Zweierzahl 1100 steht so also im System der Zehn für:

$$1 \times 8 + 1 \times 4 + 0 \times 2 + 0 \times 1 = 12$$

Das System der Vier ergibt sich entsprechend mit der Basiszahl Vier. Es hat vier Grundziffern, für die man die dezimalen Repräsentationen 0, 1, 2 und 3 nutzen kann. Die Mächtigkeiten der Stellen betragen $4^{1-1} = 1$, $4^{2-1} = 4$, $4^{3-1} = 16$, $4^{4-1} = 64$ etc. Die Viererzahl 3102 steht im System der Zehn also für:

$$3 \times 64 + 1 \times 16 + 0 \times 4 + 2 \times 1 = 210$$

Das System der Acht hat analog acht Grundziffern, die man ebenfalls dem System der Zehn entlehnen kann (0 bis 7). Die Mächtigkeiten betragen hier $8^{1-1} = 1$, $8^{2-1} = 8$, $8^{3-1} = 64$, $8^{4-1} = 512$ etc. Die Achterzahl 6253 steht im System der Zehn also für:

$$6 \times 512 + 2 \times 64 + 5 \times 8 + 3 \times 1 = 3.243$$

Das System der Sechzehn hat mehr Grundziffern als das Dezimalsystem. Will man die Grundziffern des Systems der Zehn nutzen, muss man also sechs weitere

[8] Obwohl die Wertzuweisung von rechts nach links erfolgt, da man die Stellenzahl einer Ziffer nicht von links anfangend erhält, entspricht die sprachliche Darstellung der garethischen Leseweise von links. Auffällig ist dabei aber die Abweichung bei der Einerstelle, die bei Zahlen größer Zwölf vor der Zehnerstelle ausgesprochen wird. Dies mag ein Artefakt der ursprünglichen Leserichtung von rechts sein, bei der man zunächst den Wert der Einerstelle ins Auge fasste.

[9] Der Nutzen von vier Systemen hat einen weiteren Vorteil: Die Haffajas sind mit ihrem beschränkten Geist keine Freunde der Vielfalt, sie denken meist in recht engen Bahnen. Wollen wir die Schönheit vor ihren unwürdigen Augen verbergen, so ist der Nutzen mehrerer Systeme von Vorteil, denn er wird ihren Geist verwirren und ihren Blick trüben für die wahre Schönheit, da sie nur ihren einfachen Weg kennen.

Symbole ergänzen. Der Einfachheit halber kann man die ersten sechs Buchstaben des Kusliker Alphabets nutzen. Damit erhält man als kompletten Satz 0 bis 9 und A bis F. Die Mächtigkeiten im System betragen $16^{1-1} = 1$, $16^{2-1} = 16$, $16^{3-1} = 256$, $16^{4-1} = 4.096$ etc. Die Sechzehnerzahl 25AB steht im System der Zehn also für:

$$2 \times 4.096 + 5 \times 256 + 10 \times 16 + 11 \times 1 = 9.643$$

Für die vier Systeme sollte man allerdings am sinnvollsten auch Ziffern nutzen, die für diese erschaffen wurden. Dies hätte den Vorteil, dass die Verächter der Schönheit einen weiteren Schutzwall durchbrechen müssten, um zur Erkenntnis des Wissens zu gelangen. Bei Bedarf kann man außerdem die Systeme mischen, denn Rur liebt die Vielfalt, und ein hoher Grad an Flexibilität ist schwerer zu knacken als ein starres System.

Für die Symbole finden sich zwei parallele Systeme, die einmal etwas komplexer, einmal simpler gestaltet sind. So kann man die Zeichen je nach Einsatzbedarf wählen. Die weiter oben aufgeführten Beispiele lassen sich mit ihnen wie folgt darstellen:

1100 als ||OO oder ⦶⦶OO

3102 als +|O− oder ⊕⦶O⊖

6253 als ⅄−Ψ+ oder ⅄⊖Ψ⊕

25AB als −Ψ↓← oder ⊖ΨЖЖ

Zur weiteren Sicherung gegen unerwünschte Mitleser bieten sich auch Kombinationen verschiedener Schriftsysteme wie ⊖5Ж← an, die durch ihre Vielfalt den Uneingeweihten die Zuordnung erschweren.

Bedenken muss man allerdings, dass dem erwünschten Empfänger oder Leser einer Nachricht die genutzte Art des Zahlensystems ersichtlich sein muss. Dazu kann man Hinweise im Text verstecken („*Geschrieben am 4. Tag des Rondramonds.*"), feste Reihenfolgen vereinbaren (fester Wechsel zwischen 4er- und 8er-System) oder beispielsweise jeder Zahl die höchstmögliche Ziffer vorne oder hinten hinzufügen.

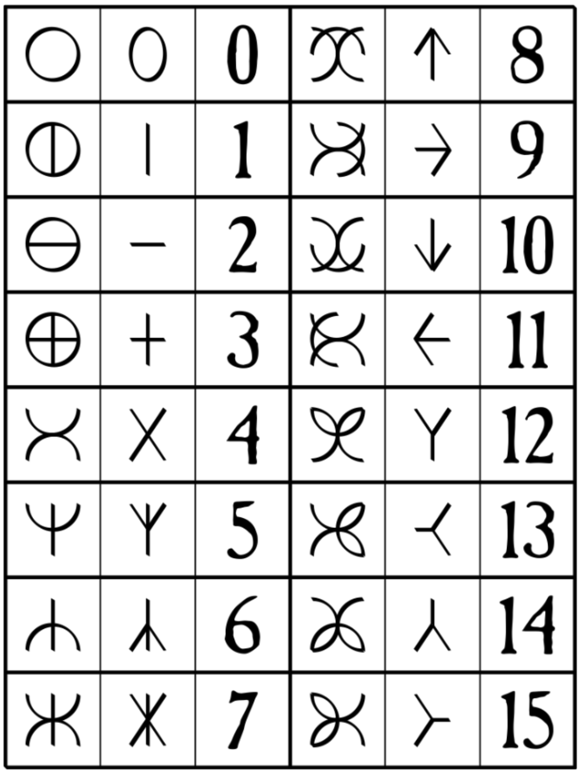

Fig. 3 – maraskanische Ziffern für die vier schönen Zahlsysteme

Harmonische Wandlung der Systeme

Wie kann man nun die vier Systeme verknüpfen? Wie kann man eine Zahl aus dem System der Zwei in eine aus dem System der Vier umrechnen? Glücklicherweise ist dies nicht schwer, wenn man einmal den Wert der Dualzahlen erfasst hat. Wichtig ist dabei nur, dass man sich den Wert ihrer ersten vier Stellen merkt. Im Dezimalsystem sind dies 1, 2, 4 und 8.

Starten wir mit der Wandlung von Zwillingszahlen in solche der anderen drei Systeme. Für diesen Vorgang bildet man Zifferngruppen bestimmter Größen und übersetzt dann diese einzeln als Stellen der übersetzten Zahl. Als Beispiel in den folgenden Umrechnungen soll jeweils die Zwillingszahl 111.1001.0011 umgerechnet werden.

Umrechnung vom Zweier- ins Vierersystem

Man bildet von rechts aus Zweiergruppen, fehlen links Stellen, dann ergänzt man dort Nullen. Die jeweiligen Gruppen übersetzt man einzeln ins Vierersystem, wobei man den Wert der beiden Stellen addiert.

01	11	10	01	00	11
0 + 1	2 + 1	2 + 0	0 + 1	0 + 0	2 + 1
1	3	2	1	0	3

Es ergibt sich so also die Zahl 13.2103 im Vierersystem.

Umrechnung vom Zweier- ins Achtersystem
Man bildet von rechts aus Dreiergruppen, fehlen links Stellen, dann ergänzt man dort Nullen. Die jeweiligen Gruppen übersetzt man einzeln ins Achtersystem, wobei man den Wert der drei Stellen addiert.

011	110	010	011
0+2+1	4+2+0	0+2+0	0+2+1
3	6	2	3

Es ergibt sich so also die Zahl 3623 im Achtersystem.

Umrechnung vom Zweier- ins Sechzehnersystem
Man bildet von rechts aus Vierergruppen, fehlen links Stellen, dann ergänzt man dort Nullen. Die jeweiligen Gruppen übersetzt man einzeln ins Sechzehnersystem, wobei man den Wert der vier Stellen addiert.

0111	1001	0011
0+4+2+1	8+0+0+1	0+0+2+1
7	9	3

Es ergibt sich so also die Zahl 793 im Sechzehnersystem.

Umrechnung vom Vierer- ins Sechzehnersystem
Auch aus dem Vierersystem kann man einfach ins Sechzehnersystem übersetzen. Dazu muss man sich die Werte der ersten beiden Stellen im Vierersystem merken, und den Wert der Ziffer mit einrechnen, ansonsten läuft es ähnlich wie zuvor. Man bildet von rechts aus Zweiergruppen, fehlen links Stellen, dann ergänzt man dort Nullen. Die jeweiligen Gruppen übersetzt man einzeln ins Sechzehnersystem, wobei man den Wert der zwei Stellen addiert.

13	21	03
1 x 4 + 3 x 1	2 x 4 + 1 x 1	0 x 4 + 3 x 1
7	9	3

Es ergibt sich so also ebenfalls die Zahl 793 im Sechzehnersystem.

Eine einfache Umrechnung des Vierer- ins Achtersystem und des Achtersystems ins Sechzehnersystem ist so nicht möglich, auch nicht in umgekehrter Richtung. Die Gegenrichtung der obigen vier Wege ist allerdings leicht möglich. Hier nimmt man sich immer eine Stelle der Zahl und rechnet sie passend in die zwei-, drei- oder vierstellige Zielzahl um.

Umrechnung vom Vierer- ins Zweiersystem
Die jeweilige Übersetzung einer Stelle ergibt sich aus der Kombination von 1 und 2.

1	3	2	1	0	3
2-1	2-1	2-1	2-1	2-1	2-1
0-1	1-1	1-0	0-1	0-0	1-1

Es ergibt sich so also wieder die Zahl 111.1001.0011 im Zweiersystem.

Umrechnung vom Achter- ins Zweiersystem
Die jeweilige Übersetzung einer Stelle ergibt sich aus der Kombination von 1, 2 und 4.

3	6	2	3
4-2-1	4-2-1	4-2-1	4-2-1
0-1-1	1-1-0	0-1-0	0-1-1

Es ergibt sich so also auch hier wieder die Zahl 111.1001.0011 im Zweiersystem.

Umrechnung vom Sechzehner- ins Zweiersystem
Die jeweilige Übersetzung einer Stelle ergibt sich aus der Kombination von 1, 2, 4 und 8.

7	9	3
8-4-2-1	8-4-2-1	8-4-2-1
0-1-1-1	1-0-0-1	0-0-1-1

Es ergibt sich so also auch hier die Zahl 111.1001.0011 im Zweiersystem.

Übersetzung vom Sechzehner- ins Vierersystem
Die jeweilige Übersetzung einer Stelle ergibt sich aus der Kombination passender Vielfache von 4 und 1.

7		9		3	
4	1	4	1	4	1
1x	3x	2x	1x	0x	3x
1	3	2	1	0	3

Es ergibt sich so also wieder die Zahl 13.2103 im Vierersystem.

Da die weitaus meisten Zahlen immer noch im System der Zehn dargestellt werden, ist eine Umrechnung aus diesem und in dieses etwas, was häufiger gefordert sein wird. Dies ist nicht auf so schöne Weise möglich wie bei den vier harmonischen Systemen, aber dank Rurs Voraussicht gibt es auch hier nicht allzu komplexe Möglichkeiten.

Umrechnung vom Zehner- ins Zweiersystem
Man teilt die Zehnerzahl immer wieder durch Zwei und schreibt die Reste der jeweiligen Teilung auf. Dies tut man so lange, bis als Ergebnis Null übrigbleibt. Vom Ende nach vorne gelesen, ergibt sich so aus den Resten der Divisionen die passende Zweierzahl. Für 243 als Dezimalzahl geschieht dies z. B. wie folgt:

243 : 2 = 121 Rest 1
121 : 2 = 60 Rest 1
60 : 2 = 30 Rest 0
30 : 2 = 15 Rest 0
15 : 2 = 7 Rest 1
7 : 2 = 3 Rest 1
3 : 2 = 1 Rest 1
1 : 2 = 0 Rest 1

Es ergibt sich die Zweierzahl 1111.0011

Umrechnung vom Zweier- ins Zehnersystem
Für den umgekehrten Weg addiert man die dezimalen Werte aller Stellen der Dualzahl, an denen eine 1 steht, und erhält so die fertige Zehnerzahl. Für die gerade erhaltene Beispielszahl 1111.0011 ergibt sich so:

1x128 + 1x64 + 1x32 + 1x16 + 0x8 + 0x4 +1x2 + 1x1
= 128 + 64 + 32 + 16 + 2 + 1
= 243

Zählung mit der Hand

Zum Abschluss möchte ich noch einmal zu unseren Händen zurückkehren. In ihrer Form missverstanden, dienten sie in der Vergangenheit als Begründung des Systems der Zehn, da die schlichten Gemüter mit ihren Fingern gerade einmal bis Zehn zählen können. Dabei kann man mit Fingern und Daumen so viel weiter zählen!

Die einfache Zählung der 8 und 2
Schon die simple Nutzung der Tatsache, dass Daumen und Finger für unterschiedliche Funktionen stehen, führt zu einem ebenfalls einfachen Fingerzählsystem, mit dem man aber ohne Probleme auch bis (10er) 24 / (16er) 18 zählen kann. Die Finger zählen dabei bis 8, doch nutzt man die Daumen, um volle Achterhände zu zählen. Jeder Daumen steht also selbst für 8, beide Daumen zusammen für (10er) 16 / (16er) 10. Dazu kommen dann noch die einzelnen Finger, womit man den Maximalwert (10er) 24 / (16er) 18 erreicht.

Die Zählung der 2 und 4 und 4
Man kann das System ausbauen, indem man beide Hände trennt. Die eine Hand zählt, wie oft die andere Hand bis vier gekommen ist, die Daumen, wie oft die zweite Hand bis vier gekommen ist. Ein Finger der zweiten Hand zählt so 4, ein Daumen 4 x 4, also (10er) 16 / (16er) 10. So kommt man beim Zählen insgesamt bis (10er) 52 / (16er) 34.

Die umfassende Dualzählung der 8 und 2
Man kann die Finger auch als Repräsentation der Zweierzahlen sehen. Diese Darstellung wird deshalb „Dualzählung" genannt. Die 8 Finger der beiden Hände stellen so die acht Stellen einer Zweierzahl dar. Auf diese Weise kann man alle Zahlen von 0 bis 1111.1111 im Zweiersystem darstellen, was 255 im Zehnersystem bzw. FF[10] im Sechzehnersystem entspricht. Addiert man dazu eine weitere 1, erhält man (10er) 256 / (16er) 100. Diese Zahl wird durch einen Daumen und keine Finger dargestellt. Die Daumen geben so als Zweierzahl Mehrfache von (10er) 256 / (16er) 100 an, die Finger Werte zwischen 0 und (10er) 255 / (16er) FF. Da man mit den Daumen als größten Wert die 3 als Zweierzahl (11) darstellen kann, ergibt sich so als maximaler Wert (10er) 1023 / (16er) 3FF.

Die sichere Dualzählung der 8 und 2
In einer alternativen Dualzählung dienen die Daumen nicht als weitere Stellen, sondern zeigen, welche der beiden Hände höherwertig ist und welche niederwertig, welche also die Stellen 5 bis 8 und welche die Stellen 1 bis 4 der Gesamtzahl repräsentiert. Die Hand, bei der der Daumen nicht gebeugt ist, zählt dabei als höherwertige Hand. So kann man mit den Händen zwar nur Zahlen bis (10er) 255 / (16er) FF darstellen, dafür kommt es aber zu weniger Missverständnissen, was die Reihenfolge der Finger betrifft!

Fazit

Rur liebt die Vielfalt! So sollten wir auch bei unseren Zahlen nicht nur die eingelaufenen Pfade im Dschungel wählen. Durch die Nutzung der uns zur Verfügung stehenden Möglichkeiten heben wir uns nicht nur von den Haffajas ab, wir nehmen dadurch auch direkt Anteil an der Schönheit der Welt. Nutzt also die Zahlen, Bruderschwestern, egal ob solche nach dem System der Zwei, der Vier, der Acht oder der Sechzehn. Und vergesst dabei nie, wie schön die Welt ist, die sich mit diesen Zahlen auf so verschiedene Weisen erfassen und berechnen lässt.

[10] F steht hier für das höchstwertige Zahlensymbol im Sechzehnersystem, s. a. Seite 6.